

# 量子力学第二讲：量子力学的诞生

刘宁

2026 年 9 月 4 日

本讲从 19 世纪末经典物理学面临的三大危机出发，系统回顾量子力学诞生的历史脉络。我们将依次讨论黑体辐射问题与普朗克的能量量子化假设、光电效应与爱因斯坦的光量子理论、康普顿效应、玻尔的原子结构理论、德布罗意的物质波假说，最后简要介绍海森堡、薛定谔和狄拉克三位奠基人的核心贡献。通过这些内容，我们将理解量子力学如何从经典物理的困境中破茧而出。

## 1 黑体辐射与能量量子化

### 1.1 黑体辐射问题

19 世纪末，经典力学和经典电磁理论已经能够解释几乎所有自然现象。然而，黑体辐射问题却成为了经典物理学的第一道裂缝。黑体 (Black Body) 是一个理想化的物体，它能够吸收全部入射的电磁辐射，而不发生任何反射或透射。在热平衡状态下，黑体发出的热辐射谱只取决于其温度，与物体的材料、形状等性质无关。

在实验室中，最接近黑体的模型是一个带有微小开孔的空腔 (图 1)。进入小孔的辐射在腔内经过无数次反射后被完全吸收，而从小孔逸出的辐射则代表了腔壁在温度  $T$  下的热平衡辐射，其性质与理想黑体完全一致。

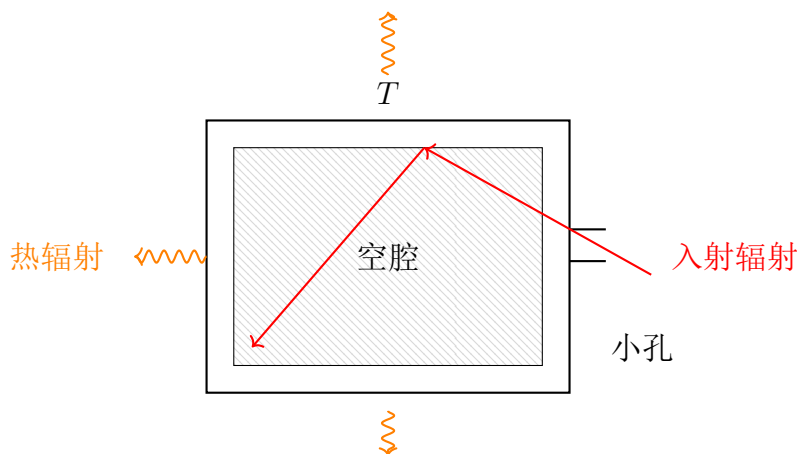


图 1: 黑体的空腔模型：带小孔的空腔，其小孔辐射近似为理想黑体辐射。

实验上，黑体辐射的能量密度  $\rho(\nu, T)$ （单位频率间隔内的辐射能量密度）随频率  $\nu$  和温度  $T$  的变化规律如图 2 所示。实验曲线显示：

1. 辐射谱存在一个峰值频率  $\nu_{\max}$ ，且满足维恩位移定律： $\nu_{\max} \propto T$ ；
2. 总辐射能量密度与  $T^4$  成正比（斯特藩-玻尔兹曼定律）；

## 1.2 普朗克的量子假说

普朗克之前，人们用经典统计物理理论得到了关于黑体辐射的不同结果，分别在高频和低频下成立。经典理论面临着巨大困境。1900 年，马克斯·普朗克提出了革命性的假设：黑体腔壁中的原子振子不能以任意数值辐射或吸收能量，而只能以离散的能量包形式发射，每个能量包的大小为

$$E = nh\nu, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

其中  $h$  是一个新的自然常数，称为**普朗克常数**，其值为

$$h = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}. \quad (2)$$

基于这一假设，普朗克推导出了与实验完全吻合的黑体辐射公式：

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \quad (3)$$

其中  $c$  是真空中的光速， $k_B$  是玻尔兹曼常数。这里  $8\pi\nu^2/c^3$  为单位体积内频率在  $\nu$  附近的模式密度（单位频率间隔内的模式数）； $h\nu$  为单个光量子的能量； $\frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$  为平均占据数（玻色-爱因斯坦分布），表示每个模式上平均有多少个能量量子。

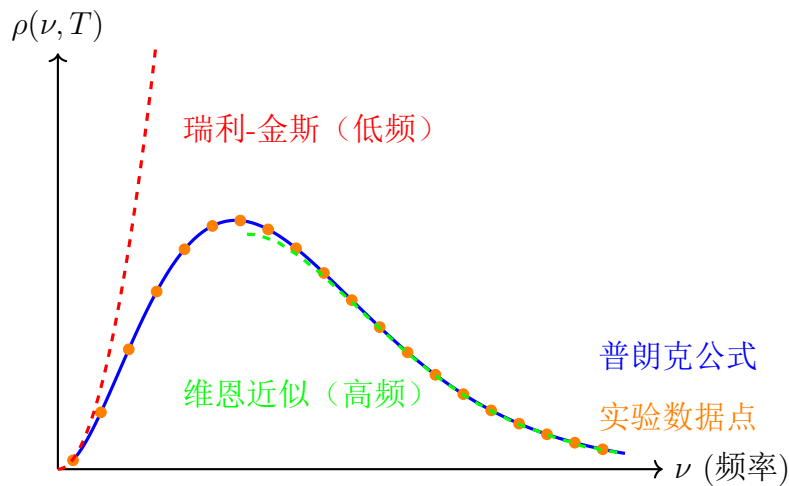


图 2: 黑体辐射谱：普朗克公式（与实验完全吻合）及其经典极限。注意维恩曲线在高频区与普朗克曲线完美重合。

## 1.3 普朗克公式的极限行为

普朗克公式在两个极限条件下可以分别退化为经典物理学中的两个著名公式。

### 1.3.1 低频极限：瑞利-金斯公式

在低频区域， $h\nu \ll k_B T$ ，此时指数函数可以展开为

$$e^{h\nu/k_B T} \approx 1 + \frac{h\nu}{k_B T} + \frac{1}{2} \left( \frac{h\nu}{k_B T} \right)^2 + \dots \quad (4)$$

因此

$$e^{h\nu/k_B T} - 1 \approx \frac{h\nu}{k_B T}. \quad (5)$$

代入普朗克公式 (3)：

$$\rho(\nu, T) \approx \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{k_B T}{h\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T. \quad (6)$$

这就是**瑞利-金斯公式**，它是经典统计力学中能量均分定理的直接结果。该公式在低频区与实验吻合，但在高频区发散（所谓的“紫外灾难”）。

### 1.3.2 高频极限：维恩公式

在高频区域， $h\nu \gg k_B T$ ，此时  $e^{h\nu/k_B T} \gg 1$ ，于是

$$e^{h\nu/k_B T} - 1 \approx e^{h\nu/k_B T}. \quad (7)$$

代入普朗克公式：

$$\rho(\nu, T) \approx \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-h\nu/k_B T}. \quad (8)$$

这就是**维恩公式**，它很好地描述了高频区域的辐射谱，但在低频区与实验不符。

**例 1.1** (维恩位移定律： $\nu_{\max} \propto T$ )。对普朗克公式求极值，令  $\partial\rho/\partial\nu = 0$ 。引入无量纲变量  $x = h\nu/(k_B T)$ ，则  $\rho \propto f(x) = x^3/(e^x - 1)$ 。求导：

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x^3}{e^x - 1} \right) = 0 \implies 3(e^x - 1) = xe^x, \quad (9)$$

整理得超越方程

$$x = 3(1 - e^{-x}). \quad (10)$$

该方程的唯一正数解记为  $\alpha = 2.821439\dots$ ，于是

$$\frac{h\nu_{\max}}{k_B T} = \alpha \implies \boxed{\nu_{\max} = \frac{\alpha k_B}{h} T}. \quad (11)$$

例 1.2 (斯特藩-玻尔兹曼定律:  $u(T) = \sigma T^4$ ). 总辐射能量密度为

$$u(T) = \int_0^\infty \rho(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu. \quad (12)$$

令  $x = h\nu/(k_B T)$ , 则  $\nu = (k_B T/h)x$ ,  $d\nu = (k_B T/h)dx$ , 代入得

$$u(T) = \frac{8\pi k_B^4}{c^3 h^3} T^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx. \quad (13)$$

利用标准积分

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \Gamma(4)\zeta(4) = 3! \cdot \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15}, \quad (14)$$

得到

$$u(T) = \frac{8\pi k_B^4}{c^3 h^3} \cdot \frac{\pi^4}{15} \cdot T^4 = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^3} T^4. \quad (15)$$

因此

$$\boxed{u(T) = \sigma T^4, \quad \sigma = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^3}.} \quad (16)$$

## 2 光的粒子性

普朗克的量子假说虽然成功地解决了黑体辐射问题, 但当时仍被认为只是一种数学技巧。而且普朗克认为光只是在在发射和接受时是具有不连续性的, 并未接受光其实作为一种物理实在(光子)而存在。真正让人们认识到光的粒子性, 是光电效应和康普顿效应这两个实验。

### 2.1 光电效应

1887 年, 赫兹在实验中发现, 当紫外线照射到金属表面时, 会从金属中激发出电子。这一现象被称为光电效应 (Photoelectric Effect)。实验发现的光电效应规律可以总结为以下四条:

1. **截止频率的存在:** 对于每一种金属, 只有当入射光的频率  $\nu$  大于某一特定值  $\nu_0$  (称为截止频率或阈值频率) 时, 才能观测到光电子。若  $\nu < \nu_0$ , 无论光强多大, 都不会有光电子产生。
2. **光电子的最大动能与光频率成线性关系:** 光电子的最大动能  $E_{k,\max}$  随入射光频率  $\nu$  线性增加, 而与入射光强无关。
3. **光电流与光强成正比:** 在入射光频率高于截止频率的条件下, 光电流的大小 (即单位时间逸出的光电子数) 与入射光的光强成正比。
4. **瞬时性:** 光电子的发射几乎是瞬时的 (时间延迟小于  $10^{-9}\text{s}$ ), 即使光强非常微弱也是如此。这与经典电磁理论的预期 (需要时间积累能量) 完全不同。

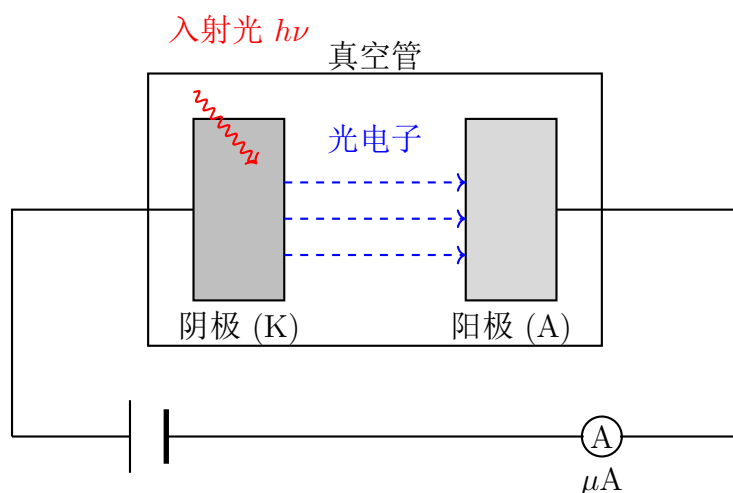


图 3: 光电效应实验电路示意图。光照射阴极 K 激发出光电子, 电子被阳极 A 收集形成光电流, 由串联在回路中的微安表 ( $\mu\text{A}$ ) 测量。

## 2.2 爱因斯坦的光量子理论

1905 年, 爱因斯坦大胆地将普朗克的量子概念推广到光本身, 提出光是由离散的能量包, 光子或  $\text{photon}$  组成的。每个光子的能量为

$$E = h\nu. \quad (17)$$

当光子与金属中的电子碰撞时, 光子将其全部能量转移给电子。电子要脱离金属表面, 必须克服金属的束缚能, 即功函数  $W$ 。因此, 光电子的最大动能满足

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = h\nu - W. \quad (18)$$

这就是爱因斯坦光电效应方程。

现在我们可以用这个方程逐一解释实验现象:

1. **截止频率:** 由方程 (18) 可知, 只有当  $h\nu > W$  时, 光电子才有正的动能。当  $h\nu = W$  时,  $\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = 0$ , 对应的频率即为截止频率

$$\nu_0 = \frac{W}{h}. \quad (19)$$

若  $\nu < \nu_0$ , 单个光子能量不足以使电子克服束缚能, 因此无论光强多大 (即光子数多少), 都不能产生光电子。

2. **动能与频率的线性关系:** 方程 (18) 明确显示, 光电子的最大动能  $E_{k,\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$  与入射光频率  $\nu$  成线性关系, 斜率为  $h$ , 截距为  $-W$ 。这一关系与光强无关, 因为光强只影响光子数目, 而不影响单个光子的能量。

3. **光电流与光强的关系：**光强正比于单位时间到达金属表面的光子数目。光强越大，光子数越多，激发的光电子数也越多，因此光电流越大。但光强不影响每个光电子的动能。
4. **瞬时性：**光子与电子的相互作用是逐个发生的，不需要能量积累的时间，因此光电子发射是瞬时的。

## 2.3 康普顿效应

光电效应证实了光具有粒子性（能量量子化），但尚未涉及动量。1923 年，康普顿通过 X 射线与自由电子的散射实验，进一步证实了光子也具有动量，从而完整地确立了光的粒子性。

当 X 射线（或  $\gamma$  射线）被物质中的自由电子散射时，散射光的波长  $\lambda'$  大于入射光的波长  $\lambda$ ，且波长偏移量  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$  与散射角  $\theta$  有关：

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta). \quad (20)$$

其中  $m_e$  是电子静止质量， $c$  是光速， $\frac{h}{m_e c} = 2.42631023867 \times 10^{-12} \text{ m}$  称为**康普顿波长**。

康普顿效应的推导基于光子与电子的弹性碰撞，同时满足能量守恒和动量守恒。

### 2.3.1 康普顿效应的详细推导

设入射光子的能量为  $h\nu$ ，动量为  $\mathbf{p} = \frac{h\nu}{c} \hat{\mathbf{n}}$ ，其中  $\hat{\mathbf{n}}$  为入射方向单位矢量。散射光子的能量为  $h\nu'$ ，动量为  $\mathbf{p}' = \frac{h\nu'}{c} \hat{\mathbf{n}}'$ ，散射角为  $\theta$ （ $\hat{\mathbf{n}}$  与  $\hat{\mathbf{n}}'$  之间的夹角）。初始电子静止，能量为  $m_e c^2$ ，动量为 0。散射后电子获得动量  $\mathbf{p}_e$ ，能量为  $\sqrt{(m_e c^2)^2 + (p_e c)^2}$ 。根据能量守恒，

$$h\nu + m_e c^2 = h\nu' + \sqrt{(m_e c^2)^2 + (p_e c)^2}. \quad (21)$$

根据动量守恒

$$\frac{h\nu}{c} \hat{\mathbf{n}} = \frac{h\nu'}{c} \hat{\mathbf{n}}' + \mathbf{p}_e. \quad (22)$$

根据这两个方程，并用  $\nu = c/\lambda$ ， $\nu' = c/\lambda'$  代入（过程省略）：

$$h \frac{c}{\lambda} \frac{c}{\lambda'} (1 - \cos \theta) = m_e c^2 \left( \frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda'} \right) = m_e c^3 \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda \lambda'}. \quad (23)$$

两边乘以  $\lambda \lambda' / (c^3)$ ：

$$\frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) = \lambda' - \lambda. \quad (24)$$

即得康普顿散射公式 (20)。

2.4 逆康普顿效应

与康普顿效应相反，当高能电子与低能光子碰撞时，光子可以从电子那里获得能量，从而波长变短、频率增大。这一过程称为**逆康普顿效应**（Inverse Compton Scattering）。康普顿效应与逆康普顿效应共享相同的微观相互作用顶点（ $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$ ），但两者的物理环境截然不同：

|        | 康普顿效应                 | 逆康普顿效应              |
|--------|-----------------------|---------------------|
| 入射粒子能量 | 光子能量高（X/ $\gamma$ 射线） | 电子能量极高（相对论性）        |
| 靶粒子状态  | 电子静止/低速               | 光子能量低（微波/可见光）       |
| 能量流向   | 光子 $\rightarrow$ 电子   | 电子 $\rightarrow$ 光子 |
| 光子波长变化 | 变长（损失能量）              | 变短（获得巨大能量）          |
| 主要应用场景 | 实验室 X 射线散射、验证 QED     | 天体物理（活动星系核、CMB 畸变）  |

表 1: 康普顿效应与逆康普顿效应的对比

逆康普顿效应在天体物理中具有重要意义：当宇宙微波背景辐射光子经过高能电子（如星系团中的热电子）时，光子被散射到更高能量，导致微波背景辐射在特定方向上的能谱发生畸变——这就是著名的**苏尼亚耶夫-泽尔多维奇效应**（Sunyaev-Zeldovich effect），是研究星系团的重要工具。

3 玻尔的原子理论

3.1 原子的核式模型与面临的困难

1911 年，卢瑟福通过  $\alpha$  粒子散射实验提出了原子的核式模型：原子由一个极小的、带正电的原子核和围绕它运动的电子组成。然而，这一模型面临两个根本性的困难：

- 1. **稳定性问题**：根据经典电磁理论，加速运动的电子会不断辐射电磁波，损失能量，最终坠入原子核。但现实中的原子是稳定存在的。
- 2. **光谱问题**：经典理论无法解释原子光谱是分立的线状谱，而不是连续的频谱。

3.2 玻尔的四条假设

1913 年，玻尔在卢瑟福模型的基础上，结合普朗克和爱因斯坦的量子概念，提出了氢原子结构的量子理论。玻尔理论的核心是四条基本假设：

- 1. **定态假设**：电子在原子中只能在一些特定的轨道上运动，这些轨道称为**定态**（Stationary States）。在定态中，电子不辐射电磁波，原子的能量是量子化的。

2. 频率条件：当电子从一个定态跃迁到另一个定态时，会吸收或发射一个光子，光子的能量等于两个定态的能量差：

$$h\nu = E_m - E_n \quad (E_m > E_n). \quad (25)$$

3. 角动量量子化条件：电子的轨道角动量只能取  $\hbar$  的整数倍：

$$L = mvr = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (26)$$

其中  $\hbar = h/2\pi$ 。

### 3.3 氢原子能级的推导

考虑氢原子中电子绕质子做圆周运动，库仑力提供向心力：

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \frac{m_e v^2}{r}. \quad (27)$$

角动量量子化条件：

$$m_e v r = n\hbar. \quad (28)$$

由 (28) 得  $v = n\hbar/(m_e r)$ ，代入 (27)：

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \frac{m_e}{r} \left( \frac{n\hbar}{m_e r} \right)^2 = \frac{n^2 \hbar^2}{m_e r^3}. \quad (29)$$

解得轨道半径：

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} n^2 = a_0 n^2, \quad (30)$$

其中

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} \approx 5.29177210903 \times 10^{-11} \text{ m} \quad (31)$$

称为玻尔半径。

系统的总能量为动能加势能：

$$E = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}. \quad (32)$$

由 (27)，得

$$E_n = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2r_n} = -\frac{m_e e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2}. \quad (33)$$

代入常数：

$$E_n = -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV}. \quad (34)$$



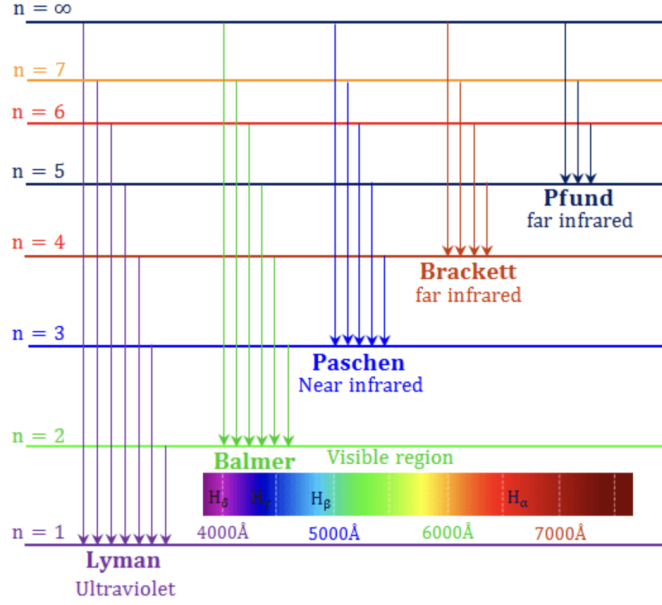


图 4: 氢原子光谱和对应的能级跃迁

### 3.4 巴尔末公式的推导

当电子从能级  $m$  跃迁到能级  $n$  ( $m > n$ ) 时, 发射光子的波数 (单位波长的倒数) 为

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{E_m - E_n}{hc}. \quad (35)$$

代入 (34):

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{hc} \left[ -\frac{13.6}{m^2} - \left( -\frac{13.6}{n^2} \right) \right] \text{eV} = \frac{13.6 \text{ eV}}{hc} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right). \quad (36)$$

用里德伯常数  $R_\infty$  表示:

$$\frac{1}{\lambda} = R_\infty \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad (37)$$

其中

$$R_\infty = \frac{m_e e^4}{4\pi c \hbar^3 (4\pi \epsilon_0)^2} \approx 1.0973731568508 \times 10^7 \text{ m}^{-1}. \quad (38)$$

对于  $n = 2$  (Balmer 系):

$$\frac{1}{\lambda} = R_\infty \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{m^2} \right), \quad m = 3, 4, 5, \dots \quad (39)$$

这就是著名的巴尔末公式, 完美地解释了氢原子在可见光区的四条谱线 ( $H_\alpha$ 、 $H_\beta$ 、 $H_\gamma$ 、 $H_\delta$ )。

### 3.5 玻尔-索末菲量子化条件

玻尔的理论虽然成功地解释了氢原子光谱, 但对于更复杂的原子和一些精细结构 (如氢原子的相对论修正) 却无能为力。1915-1916 年, 索末菲对玻尔理论进行了推广,

提出了更一般的量子化条件。对于多自由度系统，索末菲提出每个广义坐标  $q_i$  及其共轭动量  $p_i$  满足：

$$\oint p_i dq_i = n_i h, \quad n_i = 0, 1, 2, \dots \quad (40)$$

其中积分沿一个完整的周期进行。对于氢原子，在球坐标中  $(r, \theta, \phi)$ ：

$$\oint p_\phi d\phi = m h, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (41)$$

$$\oint p_\theta d\theta = k h, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (42)$$

$$\oint p_r dr = n_r h, \quad n_r = 0, 1, 2, \dots \quad (43)$$

玻尔-索末菲量子化条件给出了更精细的能级结构，并成功解释了氢原子的精细结构（如  $H_\alpha$  线的双线结构）。更重要的是，它揭示了量子化与周期运动之间的深刻联系，为后来的量子力学发展提供了重要线索。

## 4 波粒二象性与物质波

### 4.1 德布罗意的物质波假说

光电效应和康普顿效应无可辩驳地证明了光具有粒子性。然而，干涉和衍射实验又证明了光具有波动性。这种**波粒二象性**（Wave-Particle Duality）是否只限于光？1924年，德布罗意在博士论文中提出了一个大胆的假设：**不仅光具有波粒二象性，所有物质粒子也都具有波粒二象性**。德布罗意将光的波粒二象性关系推广到所有粒子。

$$E = h\nu, \quad p = \frac{h}{\lambda}. \quad (44)$$

德布罗意假设，对于任何具有动量  $p$  的粒子，都对应一个物质波，其波长为

$$\lambda = \frac{h}{p}. \quad (45)$$

这就是著名的**德布罗意关系**。

### 4.2 玻尔量子化条件的驻波解释

德布罗意指出，玻尔的角动量量子化条件可以自然地解释为电子轨道上的驻波条件。如果电子具有波动性，那么稳定的轨道必须是电子波形成驻波的轨道，即轨道周长等于德布罗意波长的整数倍：

$$2\pi r = n\lambda = n \frac{h}{p} = n \frac{h}{m_e v}. \quad (46)$$

整理得

$$m_e v r = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar. \quad (47)$$

这正是玻尔的角动量量子化条件。

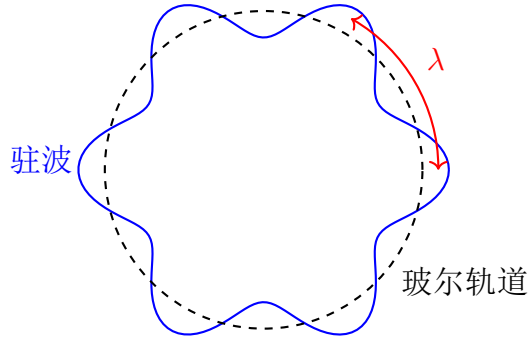


图 5: 电子轨道上的驻波 ( $n = 6$ )。稳定轨道要求轨道周长等于德布罗意波长的整数倍, 红色弧线表示一个波长  $\lambda$ 。

### 4.3 典型粒子的德布罗意波长计算

德布罗意物质波的概念在微观粒子尺度上具有重要物理意义。下面计算几种典型粒子的德布罗意波长。对于非相对论粒子, 德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}}, \quad E_k = \frac{p^2}{2m}. \quad (48)$$

| 粒子  | 质量 (kg)                 | 动能/速度                             | 德布罗意波长                           |
|-----|-------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| 电子  | $9.109 \times 10^{-31}$ | $E_k = 1 \text{ eV}$              | 1.23 nm                          |
| 电子  | $9.109 \times 10^{-31}$ | $E_k = 100 \text{ eV}$            | 0.123 nm                         |
| 电子  | $9.109 \times 10^{-31}$ | $E_k = 10 \text{ keV}$            | 0.0123 nm                        |
| 质子  | $1.673 \times 10^{-27}$ | $E_k = 1 \text{ eV}$              | 0.0286 nm                        |
| 中子  | $1.675 \times 10^{-27}$ | $E_k = 0.025 \text{ eV}$ (室温热中子)  | 0.181 nm                         |
| 水分子 | $3.0 \times 10^{-26}$   | $v = 300 \text{ m/s}$             | 0.0736 nm                        |
| 乒乓球 | $2.7 \times 10^{-3}$    | $v = 10 \text{ m/s}$              | $2.45 \times 10^{-32} \text{ m}$ |
| 地球  | $5.97 \times 10^{24}$   | $v = 3.0 \times 10^4 \text{ m/s}$ | $3.7 \times 10^{-63} \text{ m}$  |

表 2: 典型粒子的德布罗意波长 (非相对论)

从表 2 可以看出, 宏观物体的德布罗意波长极其微小 (远小于原子核尺寸), 其波动性完全无法观测; 而对于微观粒子 (如电子、中子), 其波长与晶格常数 ( $\sim 0.1 \text{ nm}$ ) 相当, 这正是电子衍射和中子衍射实验的物理基础。

### 4.4 德布罗意波长与温度的关系

对于理想气体中的粒子, 平均动能由温度决定:

$$\langle E_k \rangle = \frac{3}{2} k_B T. \quad (49)$$

因此, 粒子的德布罗意波长可以表示为温度的函数:

$$\lambda(T) = \frac{h}{\sqrt{2m\langle E_k \rangle}} = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}}. \quad (50)$$

当粒子的平均间距  $d$  小于德布罗意波长时，即

$$d \lesssim \lambda, \quad (51)$$

量子效应开始变得显著，粒子将表现出集体量子行为（如玻色-爱因斯坦凝聚）。对于粒子数密度  $n$ ，平均间距  $d = n^{-1/3}$ ，因此量子简并发生的条件为

$$n^{1/3} \lambda \gtrsim 1. \quad (52)$$

代入 (50)：

$$T \lesssim \frac{\hbar^2}{3mk_B} n^{2/3}. \quad (53)$$

这就是量子简并温度的估计。

## 5 量子力学的建立：三位奠基人

量子力学的建立并非一蹴而就，而是由多位物理学家的贡献共同完成的。其中，海森堡、薛定谔和狄拉克被公认为量子力学的主要奠基人。

### 5.1 海森堡与矩阵力学

1925 年，年仅 24 岁的海森堡提出了量子力学的第一种数学形式——**矩阵力学** (Matrix Mechanics)。海森堡的核心思想是：物理理论应该只建立在可观测量的基础上，而不是不可观测的电子轨道等经典概念。他用矩阵代替了经典的力学量，发现位置和动量的矩阵满足非对易关系。**海森堡的核心方程**（基本对易关系）：

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] \equiv \hat{x}_i \hat{p}_j - \hat{p}_j \hat{x}_i = i\hbar \delta_{ij}. \quad (54)$$

这一对易关系直接导致了**不确定性原理** (Uncertainty Principle)：

$$\Delta x_i \cdot \Delta p_i \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (55)$$

这里  $\hbar = h/2\pi$ 。海森堡的矩阵力学采用了抽象的代数方法，在当时较为难以理解，但其数学结构与实验完全吻合。

### 5.2 薛定谔与波动力学

1926 年，薛定谔从德布罗意的物质波假说出发，建立了量子力学的第二种数学形式——**波动力学** (Wave Mechanics)。薛定谔发现，物质波的传播可以用一个波动方程来描述。

**薛定谔的核心方程**（含时薛定谔方程）：

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \hat{H} \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (56)$$

其中  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  是波函数,  $\hat{H}$  是哈密顿算符。对于定态问题 ( $\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})e^{-iEt/\hbar}$ ), 方程简化为定态薛定谔方程:

$$\hat{H}\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}). \quad (57)$$

波动力学使用熟悉的微分方程形式, 比矩阵力学更直观, 因此被更广泛地接受。薛定谔还证明了波动力学和矩阵力学在数学上是等价的。

### 5.3 狄拉克与量子力学的统一

狄拉克对量子力学的贡献是多方面的。1926-1930 年间, 他提出了简洁抽象的狄拉克符号 (Dirac Notation):

$$|\psi\rangle \text{ (右矢), } \langle\phi| \text{ (左矢)}. \quad (58)$$

这一符号体系极大地简化了量子力学的表述, 并成为现代量子力学的标准语言。并发展了变换理论, 统一了矩阵力学和波动力学, 证明了它们是同一理论的不同表象。他还将量子力学与狭义相对论结合, 提出了相对论性量子力学方程:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0. \quad (59)$$

狄拉克方程自然地给出了电子的自旋 (自旋量子数  $s = 1/2$ ) 和磁矩, 并预言了正电子的存在, 开启了量子场论的时代。

## 6 结语

| 时间   | 科学家  | 核心贡献            |
|------|------|-----------------|
| 1900 | 普朗克  | 能量量子化, 解决黑体辐射问题 |
| 1905 | 爱因斯坦 | 光量子假说, 解释光电效应等  |
| 1913 | 玻尔   | 原子结构的量子理论       |
| 1924 | 德布罗意 | 物质波假说, 波粒二象性    |
| 1925 | 海森堡  | 矩阵力学, 不确定性原理    |
| 1926 | 薛定谔  | 波动力学, 薛定谔方程     |
| 1926 | 狄拉克  | 统一表述, 相对论量子力学   |

表 3: 量子力学创立过程中的奠基人

量子力学的诞生是物理学史上最深刻的革命之一。从 1900 年普朗克提出能量量子化假设, 到 1926 年狄拉克完成量子力学的理论统一, 短短二十多年间, 人类对自然界的认识发生了翻天覆地的变化。量子力学的诞生不仅解决了经典物理学无法解释的实验现象, 更深刻地改变了我们对于基本物质结构和运动规律的理解。在经典物理中, 世界

是确定性的、可预言的；而在量子世界中，概率和不确定性成为了基本特征。量子力学的概念，如波粒二象性、不确定性原理、量子纠缠等，至今仍在不断地激发着物理学家孜孜不倦的思考。

## 习题

根据德布罗意理论，一个自由粒子（质量  $m$ ，动量  $p$ ，总能量  $E$ ）对应一个物质波。为了理解波的传播特性，我们考虑一维自由粒子的波函数：

$$\psi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)} \quad (60)$$

其中  $k = 2\pi/\lambda$  是波数， $\omega = 2\pi\nu$  是角频率。

1. 由德布罗意关系  $\lambda = h/p$  和  $E = h\nu$ ，请用波数  $k$  和角频率  $\omega$  分别表示粒子的动量  $p$  和能量  $E$ ,

$$p = \hbar k, \quad E = \hbar \omega. \quad (61)$$

这里  $\hbar = h/2\pi$ .

2. 对于非相对论自由粒子， $E = p^2/(2m)$ ，请推导角频率  $\omega$  与波数  $k$  之间的色散关系  $\omega = \omega(k)$ ,

$$\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}. \quad (62)$$

3. 相速度  $v_p$  定义为等相位面的传播速度，满足  $\omega - kv_p = 0$ ，即  $v_p = \omega/k$ ，请计算德布罗意波的相速度  $v_p$ ，用粒子的速度  $v = p/m$  表示
4. 群速度  $v_g$  定义为波包的传播速度，满足  $v_g = d\omega/dk$ ，计算德布罗意波的群速度  $v_g$ ，用粒子的速度  $v$  表示
5. 比较  $v_p$  和  $v_g$  的大小关系，哪个速度代表粒子的实际运动？